

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 02 trang)

Bài 1. (3 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = \frac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} = a + b$

Bài 2. (5 điểm)

Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$

b)
$$\begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Bài 3. (2 điểm)

Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC , chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Bài 4. (4 điểm)

a) Cho hai số dương x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{x^2 + 12}{x + y} + y$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại điểm K khác A . Chứng minh rằng:

a) KH đi qua trung điểm M của cạnh BC .

b) BC là tiếp tuyến chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHK và CHK .

Bài 6. (2 điểm)

Theo quyết định Bộ Công Thương ban hành, giá bán lẻ điện sinh hoạt từ 16/3 sẽ dao động trong khoảng từ 1484 đến 2587 đồng mỗi kWh tùy bậc thang. Dưới đây là bảng so sánh biểu giá điện trước và sau khi điều chỉnh:

(còn tiếp trang sau)

Mức sử dụng trong tháng (kWh)	Giá mới	Giá hiện tại
0 - 50	1484	1388
51 - 100	1533	1433
101 - 200	1786	1660
201 - 300	2242	2082
301 - 400	2503	2324
401 trở lên	2587	2399

Đơn vị: Đồng/kWh

- Nếu hộ A trung bình mỗi tháng tiêu thụ 120kWh thì theo giá mới số tiền phải trả tăng lên bao nhiêu trong một tháng?
- Hộ B trong tháng 2 đã trả tiền sử dụng điện là 194170 đồng. Hỏi lượng điện mà hộ B tiêu thụ trong tháng 2 là bao nhiêu?
- Giả sử hộ C trong nửa tháng đầu được tính theo giá cũ, trong nửa tháng sau được tính theo giá mới với mức sử dụng thực tế (bao gồm cả nửa tháng đầu) và lượng điện tiêu thụ ở mỗi nửa tháng là bằng nhau. Số tiền cuối tháng hộ C phải trả là 116350 đồng. Hỏi lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là bao nhiêu? Biết rằng lượng điện tiêu thụ không vượt quá 100kWh.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (3 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = \frac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} = a + b$

$$ab \cdot ac + bc \cdot ab + ac \cdot bc = 1 \Rightarrow 1 + b^2c^2 = (bc + ab)(bc + ac), \quad (1đ)$$

$$\text{Cmtt: } 1 + a^2c^2 = (ac + ab)(ac + bc), \quad 1 + a^2b^2 = (ab + ac)(ab + bc) \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2+a^2b^2c^2}} = \sqrt{\frac{(ac+bc)^2}{c^2}} = a + b \quad (1,5đ)$$

Bài 2. (5 điểm)

$$\text{a) } 2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x\sqrt{x+3} - x\sqrt{x+3} + (x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})(x - \sqrt{x+3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x & (1) \\ \sqrt{x+3} = x & (2) \end{cases} \quad (1đ)$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 1 \quad (0,5đ)$$

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad (0,5đ)$$

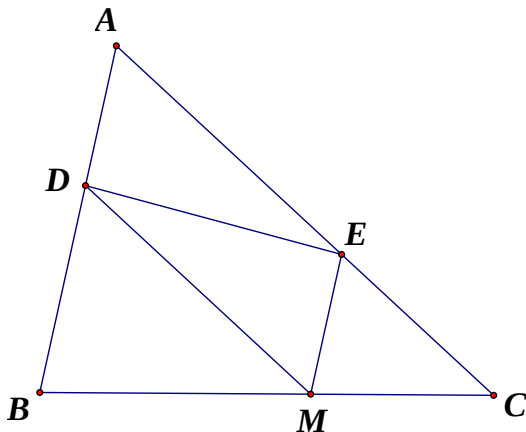
$$\text{b) } \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x^2 - 2\sqrt{x-1} \end{cases} \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ 3\sqrt{x-1} = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-1)(x-2)(x^2+3x+5) = 0 \end{cases} \quad (2đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-1} \\ x = 1 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

Bài 3. (2 điểm)

Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC , chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.



Gọi tên hình bình hành là $MDAE$.

Ta có:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{CM}{BC} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{CM \cdot BM}{BC^2} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Ta có } BM \cdot CM \leq \frac{(BM + CM)^2}{4} = \frac{BC^2}{4} \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow S_{ADE} \leq \frac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow S_{MDAE} \leq \frac{1}{2} S_{ABC} \quad (0,5đ)$$

$\Rightarrow$ Diện tích hình bình hành lớn nhất khi M là trung điểm của BC . (0,5đ)

Bài 4. (4 điểm)

a) Cho hai số dương x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{x^2 + 12}{x + y} + y$

Giải

$$P = \frac{x^2 + 12}{x + y} + y = \frac{x^2 + xy + y^2 + 12}{x + y} = \frac{4x^2 + 4xy + 4y^2 + 48}{4(x + y)} \quad (0,5đ)$$

$$= \frac{3(x + y)^2 + (x - y)^2 + 48}{4(x + y)} \geq \frac{3}{4}(x + y) + \frac{12}{x + y} \geq 6 \quad (1đ)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6 khi $x = y = 2$ (0,5đ)

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow (y + 2x + 1)(y + x + 1) = -1 \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2x + 1 = 1 \\ y + x + 1 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y + 2x + 1 = -1 \\ y + x + 1 = 1 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại điểm K khác A . Chứng minh rằng:

a) KH đi qua trung điểm M của cạnh BC .

b) BC là tiếp tuyến chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHK và CHK .

a/ KH đi qua trung điểm M của cạnh BC

Dễ thấy đường tròn (ADE) đi qua H (do $AEHD$ nội tiếp) (0,5đ)

$\Rightarrow AH$ là đường kính của đường tròn $(ADE) \Rightarrow \angle AKH = 90^\circ$ (0,25đ)

Gọi F là giao điểm của KH với $(O) \Rightarrow AF$ là đường kính của (O) . (0,25đ)

$\Rightarrow BHCF$ là hình bình hành. (0,75đ)

$\Rightarrow HF$ đi qua trung điểm M của BC . (0,25đ)

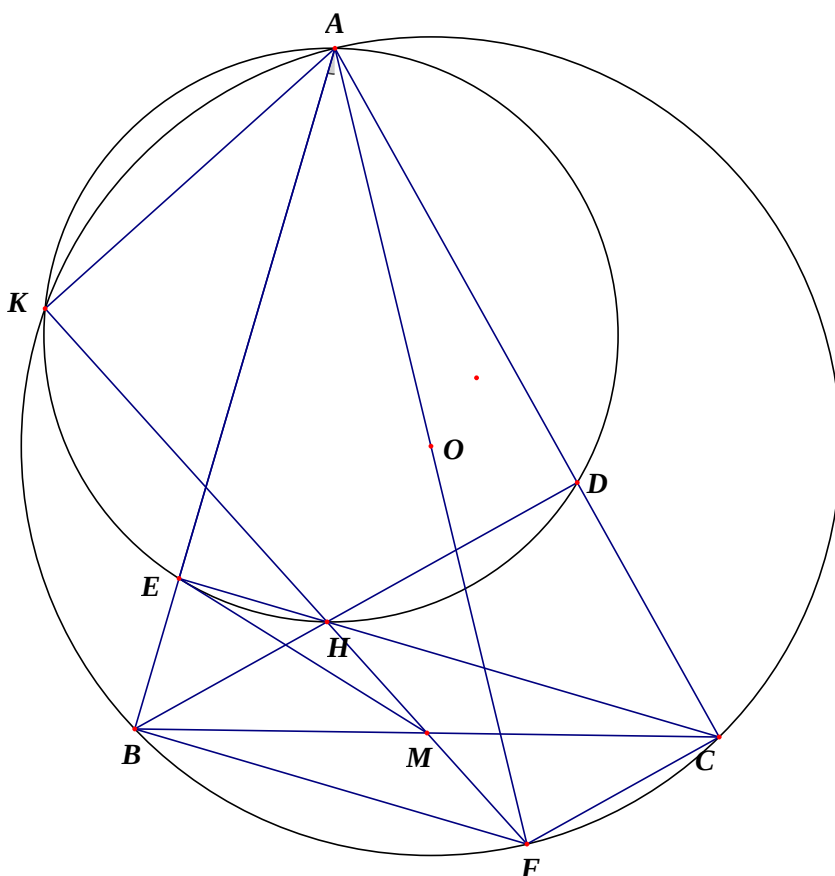
b/ BC là tiếp tuyến chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHK và CHK .

Ta có $\angle MBH = \angle MCF$, $\angle MCF = \angle MKB$ (0,5đ)

$\Rightarrow \angle MBH = \angle MKB$ (0,5đ)

$\Rightarrow BC$ tiếp xúc với đường tròn (BHK) tại B . (0,5đ)

Cmtt BC tiếp xúc với đường tròn (CHK) tại C . (0,5đ)



Bài 6. (2 điểm)

a/ Số tiền hộ A phải trả theo giá cũ: $50.1388 + 50.1433 + 20.1660 = 174250$ đồng

Số tiền hộ A phải trả theo giá cũ: $50.1484 + 50.1533 + 20.1786 = 186570$ đồng

Số tiền tăng lên: $186570 - 174250 = 12320$ đồng (0,5đ)

Có thể tính gộp : $50.(1484 - 1388) + 50.(1533 - 1433) + 20.(1786 - 1660) = 12320$ đồng

b/

$50.1388 + 50.1433 = 141050$; $50.1388 + 50.1433 + 100.1660 = 307050$

Do $141050 < 194170 < 307050$ nên hộ B tiêu thụ từ 101 đến 200kWh.

Lượng điện mà hộ B tiêu thụ : $(194170 - 141050) : 1660 + 100 = 132$ kWh (0,5đ)

c/ Giả sử hộ C trong nửa tháng đầu được tính theo giá cũ, trong nửa tháng sau được tính theo giá mới với mức sử dụng thực tế (bao gồm cả nửa tháng đầu) và lượng điện tiêu thụ ở mỗi nửa tháng là bằng nhau. Số tiền cuối tháng hộ C phải trả là 116350 đồng. Hỏi lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là bao nhiêu? Biết rằng lượng điện tiêu thụ không vượt quá 100kWh.

Gọi x (kWh) là lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong nửa tháng đầu với $x \leq 50$.

$\Rightarrow$ Lượng điện tiêu thụ trong tháng là $2x$.

Nếu $2x \leq 50$ thì ta có phương trình: $x.1388 + x.1484 = 116350$ suy ra $x \approx 40,5$ (loại)

Nếu $2x > 50$ thì ta có phương trình: $x.1388 + (50 - x).1484 + (2x - 50).1533 = 116350$
suy ra $x = 40$

Vậy lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là 80kWh.

(1đ)